Adı Soyadı:
Numarası:

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER I ARA SINAV SORULARI

28.11.2022

1. a ve b birbirinden bağımsız keyfi sabitler olmak üzere $e^x y = ax + be^x$ eğri ailesini genel çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.
2. $5 + y - y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
3. $y' = \frac{y}{x} - \frac{2\sqrt{xy}}{x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
4. $y' = \frac{y - 2x - e^{x+y}}{e^{x+y} - x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
5. $x^4 y' + 5x^3 y = 2$ denkleminin $y(-1) = 1$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Sadece 4 soru cevaplandırınız.
Süre 90 dakikadır. Başarılar...

Doç. Dr. Fatma Hıra

Cevaplar

① $e^x y = ax + be^x$ dan

$y = axe^{-x} + b$ yazılır.
İki keyfi sabit olduğundan
iki kez türev alınırsa

$y' = a(e^{-x} - xe^{-x})$

$y'' = a(-2e^{-x} + xe^{-x})$

olur. Taraf tarafa oranlanırsalar

$$\frac{y'}{y''} = \frac{\cancel{e^{-x}}(1-x)}{\cancel{e^{-x}}(-2+x)}$$

$(1-x)y'' + (2-x)y' = 0$

İkinci mertebeden dif denk.
bulunur.

② $5 + y - y' = 0$

$y' = 5 + y$

$\frac{dy}{dx} = 5 + y$

$\int \frac{dy}{5+y} = \int dx$ değişkenlerine ayrılabilen denk. integral alınırsa

$\ln|5+y| = x + c$

veya $5 + y = a e^x$ $(e^c = a)$

genel çözümdür.

③ $y' = \frac{y}{x} - \frac{2\sqrt{xy}}{x}$

$y' = \frac{y - 2\sqrt{xy}}{x}$ pay ve payda 1. derece olup aynı dereceli olduğundan homojen denklemdir.

$y = ux$ dönüşümü yapılırsa $y' = u'x + u$ olup denklemde yerlerine yazılırsalar

$$y' = \frac{y - 2\sqrt{xy}}{x}$$

$$u'x + u = \frac{ux - 2\sqrt{x^2u}}{x}$$

$$u'x + \cancel{u} = \cancel{u} - 2\sqrt{u}$$

$$u'x = -2\sqrt{u}$$

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int -\frac{dx}{x} \quad \text{DA denklemi}$$

$$\sqrt{u} = -\ln x + c$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\ln x + c$$

genel çözümdür

④ $$y' = \frac{y - 2x - e^{x+y}}{e^{x+y} - x}$$

$$\underbrace{(y - 2x - e^{x+y})}_{M(x,y)} dx + \underbrace{(x - e^{x+y})}_{N(x,y)} dy = 0$$

$M_y = 1 - e^{x+y} = N_x$ olduğundan denklem tam diferansiyeldir

1. yol $\int (y - 2x - e^{x+y})\, \partial x + \int (x - e^{x+y})\, \partial y = \int 0$

$$yx - x^2 - e^y . e^x + \cancel{xy} - \cancel{e^x . e^y} = c$$

$$xy - x^2 - e^{x+y} = c$$

genel çözüm

2. yol $y\,dx - 2x\,dx - e^{x+y} dx + x\,dy - e^{x+y} dy = 0$

$$\int -2x\,dx + \int d(xy) - \int d(e^{x+y}) = \int 0$$

$$-x^2 + xy - e^{x+y} = c$$

genel çözüm

⑤ $x^4 y' + 5x^3 y = 2$

$$y' + \underbrace{\frac{5}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{2}{x^4}}_{Q(x)} \quad \text{lineer denklemdir}$$

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{5}{x} dx} = e^{5 \ln x} = x^5$$

olarak üzere genel çözüm

$$\lambda(x) . y = \int \lambda(x) . Q(x)\, dx + C$$

$$x^5 . y = \int x^5 . \frac{2}{x^4}\, dx + C$$

$$x^5 . y = x^2 + C \quad \text{genel çözüm}$$

$y(-1) = 1$ koşulunu sağlayan çözüm için $x = -1$, $y = 1$ için

$(-1)^5 . 1 = (-1)^2 + C \Rightarrow C = -2$ olup

$$x^5 y = x^2 - 2$$

istenen özel çözümdür.

⑤. soru için

$$\overset{N}{x^4} dy + \overset{M}{(5x^3 y - 2)} dx = 0$$

yazılırsa $M_y = 5x^3 \neq N_x = 4x^3$ olup tam dif değildir.

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$ için $\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$

integral çarpanı olup bu yöntem ile de çözülebilir.